



# Regolarità e imperfezioni della simmetria

Agorà

**Giuliana Gnani**  
**Dipartimento di matematica e informatica**

26 marzo 2014

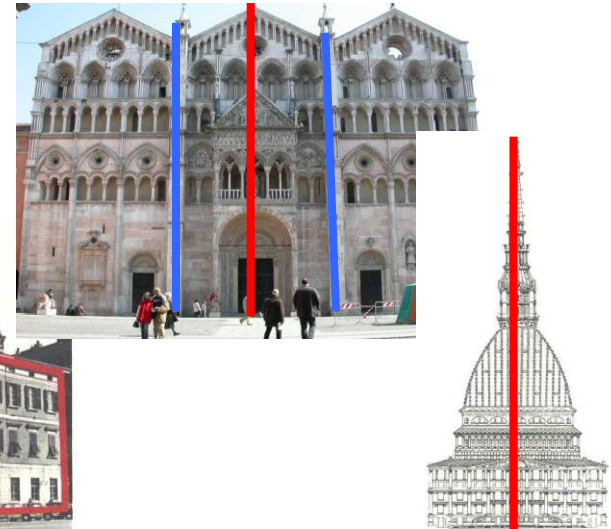
# Le simmetrie del piano come trasformazioni geometriche

Si sottolinea l'importanza dell'insegnamento della geometria delle trasformazioni:

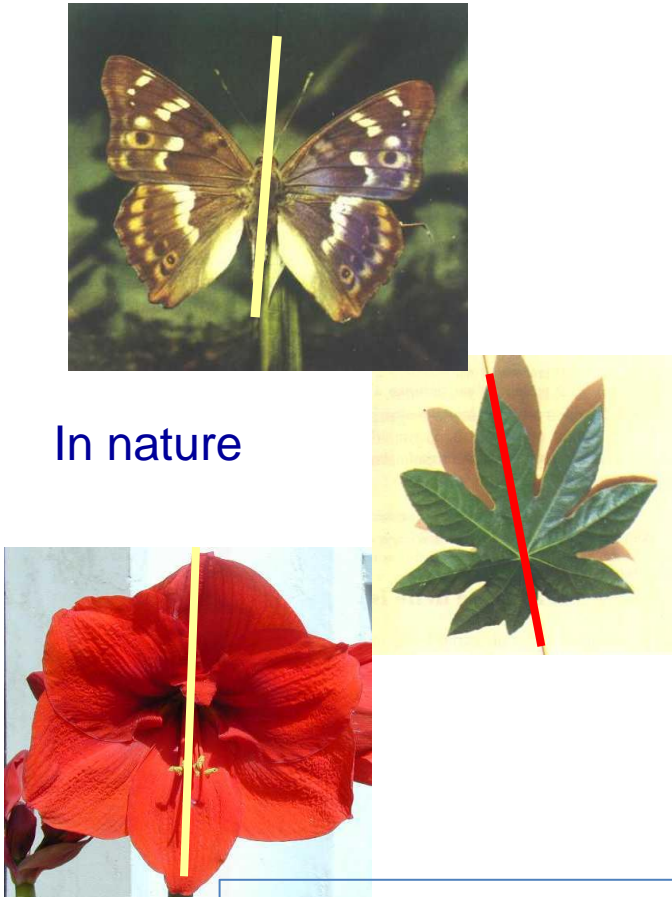
- Perché insegnare la geometria attraverso le trasformazioni?
  - *Visione dinamica della geometria*
  - *Geometria come studio delle proprietà invarianti*
  - *Collegamenti con l'algebra e la geometria analitica*
  - *Collegamenti con altri ambiti disciplinari: chimica, fisica, geologia, biologia, arte (collegamento con il percorso Simmetrie)*
- Quale preparazione deve avere l'insegnante per svolgere tale insegnamento?
- Come proporre questo insegnamento nella pratica scolastica ?

# Let us observe axial symmetries in nature and the world around us:

In architecture



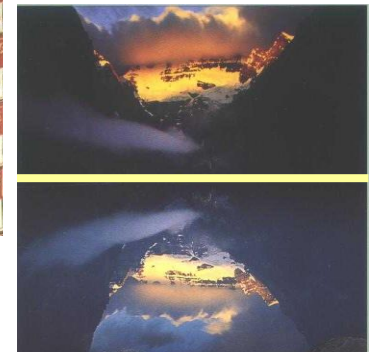
In nature



progetto ISSUE



In art



- Si propone la trattazione delle simmetrie del piano all'interno del tema generale delle trasformazioni geometriche del piano (nucleo fondante) allo scopo di dare una visione organica dell'argomento dal punto di vista matematico

# Notizie di storia delle matematiche

- **Il programma di Erlangen**

Lo studio delle simmetrie come trasformazioni geometriche risale agli anni settanta dell'Ottocento, quando Felix Klein (1849-1925) introdusse una visione unitaria della geometria in senso globale utilizzando il concetto di gruppo.

La nuova concezione di Klein ebbe origine dagli studi sulla teoria dei gruppi che, a La visione di Klein è illustrata nella prolusione che egli tenne ad Erlangen nel 1872, in occasione della libera docenza, ed è nota come **Programma di Erlangen (*Erlanger Programme*)**. In esso una geometria è descritta come lo studio delle proprietà che sono invarianti rispetto ad un particolare gruppo di trasformazioni. Ad esempio la geometria euclidea del piano è lo studio delle proprietà che sono invarianti per trasformazioni ortogonali affini (traslazioni, rotazioni e simmetrie) del piano in sé.

La geometria affine è lo studio delle proprietà delle figure che sono invarianti per trasformazioni affini (lineari affini a determinante  $\neq 0$ ), tra queste proprietà ad esempio vi è quella di trasformare una conica di un determinato tipo in una conica dello stesso tipo, la geometria proiettiva è lo studio delle proprietà che sono invarianti per trasformazioni proiettive, e così via.

In questo modo qualsiasi classificazione di trasformazioni in gruppi e sottogruppi diventa una classificazione delle diverse geometrie, consentendo anche di interpretare le geometrie non euclidee iperbolica ed ellittica, assieme alla geometria euclidea, nell'ambito della geometria proiettiva.

L'influenza del programma di Erlangen, dapprima limitata, divenne poi universale, caratterizzando l'impostazione generale di tutti i corsi universitari di geometria. Klein d'altronde svolse ininterrottamente per circa mezzo secolo attività di insegnamento e divulgazione esercitando un forte influsso sugli ambienti pedagogici a vari

Attualmente, in tutti gli ordini di scuole, coesistono tre differenti approcci alla geometria:

- la geometria classica che ha le sue basi nella teoria assiomatica e trae origine dagli Elementi di Euclide, e che codifica ad un livello razionale ed astratto l'uso della riga e del compasso
- la geometria delle coordinate che nasce dalla geometria cartesiana e quindi dalla introduzione dell'algebra nella trattazione dei problemi geometrici
- la geometria delle trasformazioni la cui impostazione teorica si trova nel programma di Klein.

### Caso proiettivo:

- i raggi sono semirette passanti per  $O$ , non paralleli al piano  $ABP$

- i piani sono distinti incidenti oppure paralleli

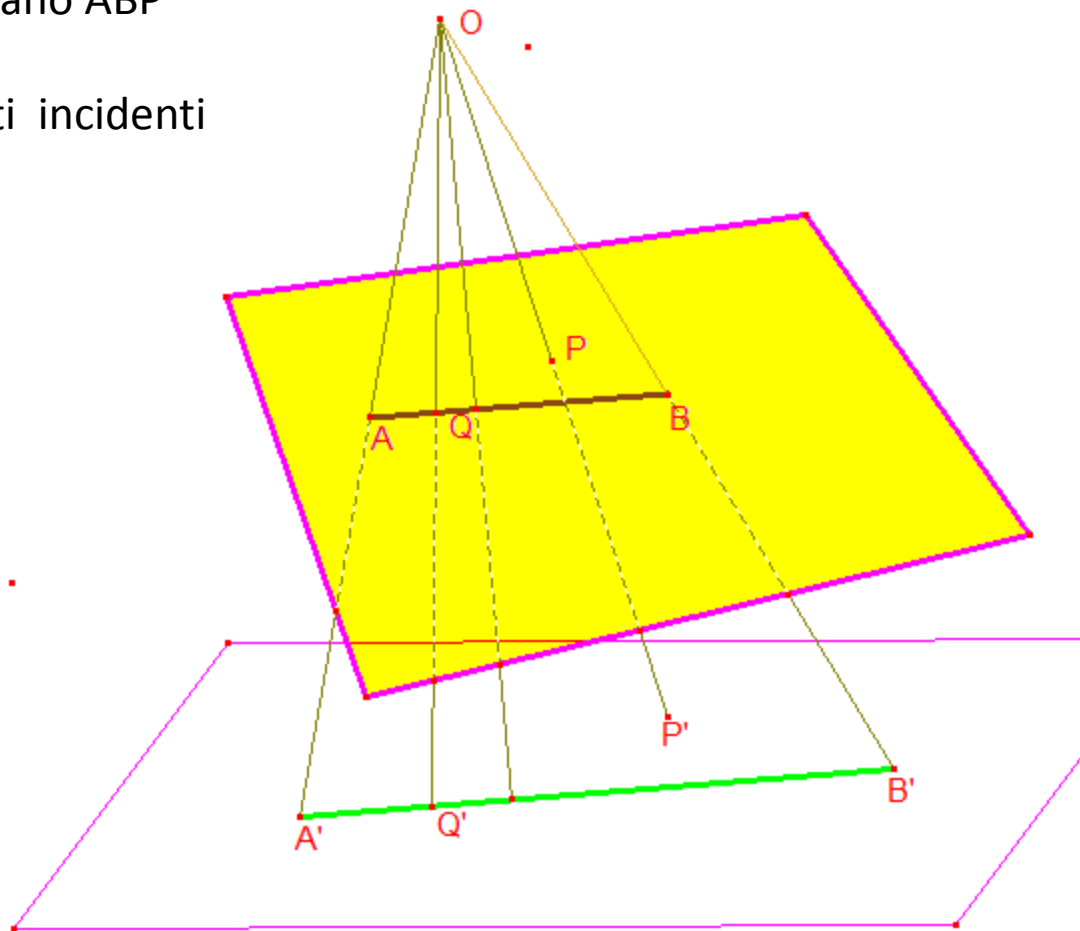


figura realizzata dalla prof.ssa Angela  
Balestra

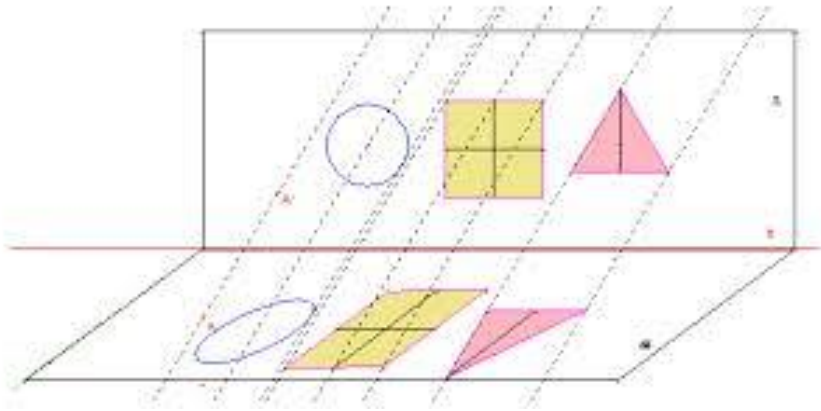
Qualora i piani siano paralleli si  
realizza una particolare  
trasformazione proiettiva  
***Similitudine tra piani***



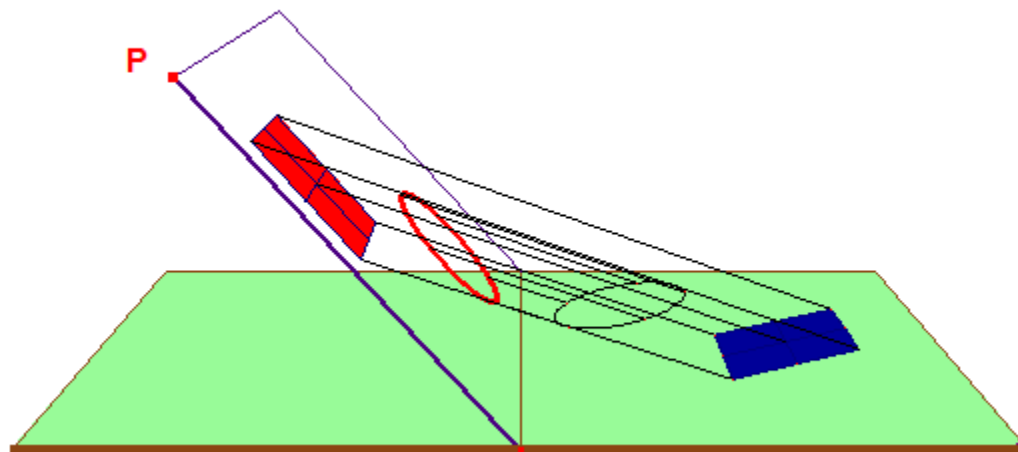
figura realizzata dalla prof.ssa Angela  
Balestra



# Affinità

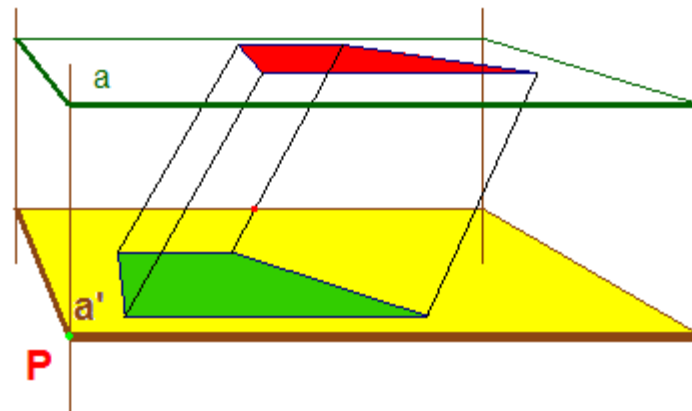


- Omologia affine: i raggi sono paralleli fra loro, i piani sono incidenti



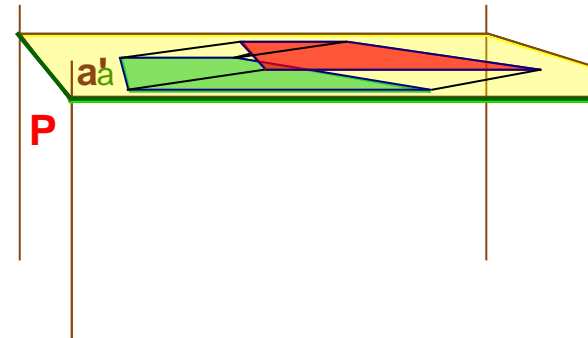
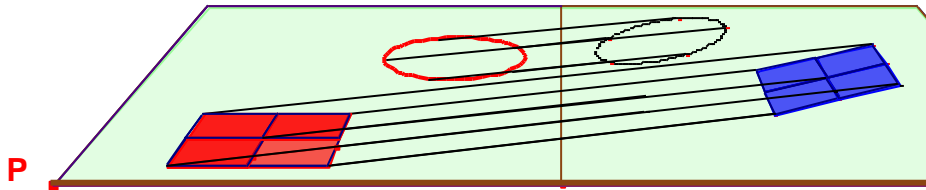
Diapo (b)

figura realizzata dalla prof.ssa Angela  
Balestra



Diapo (a)

figura realizzata dalla prof.ssa Angela  
Balestra



Come passare dalle trasformazioni tra piani distinti a trasformazioni del piano :

- SI PUÒ INTRODURRE IL CONCETTO DI FUNZIONE PER VIA GRAFICA
- SI CONSTATA INOLTRE LA NECESSITÀ DI SUPERARE LO STUDIO DELLE TRASFORMAZIONI, SPESSO VISTE DALLO STUDENTE LIMITATE AD UNA FIGURA E ALLA SUA TRASFORMATA, PER ARRIVARE A CONSIDERARE LA TRASFORMAZIONE COME FUNZIONE DEFINITA SUL PIANO

# La geometria della riflessione in uno specchio o della piegatura della carta

Viene anche in tal modo evidenziata la connessione tra i possibili metodi di insegnamento della geometria: da una parte l'approccio euclideo che utilizza il concetto intuitivo di movimento rigido, dall'altro l'approccio dinamico tramite le trasformazioni che utilizza il concetto di isometria.

Per l'insegnamento della geometria nella scuola secondaria di primo grado si consiglia di passare gradualmente dal metodo euclideo al metodo delle trasformazioni, quindi di passare dal concetto intuitivo di movimento rigido a quello di trasformazione e in particolare di isometria, preparando gradualmente il terreno per introdurre l'insegnamento assiomatico della geometria, che sarà svolto nella scuola secondaria di secondo grado.

Vedere il percorso Simmetrie( progetto ISSUE)  
per

- isometrie
- simmetria assiale
- simmetria centrale
- simmetria radiale

# Trasformazioni del piano

## Definizione

- Una trasformazione del piano è una corrispondenza biunivoca (o biiettiva) tra l'insieme dei punti del piano e se stesso.

Questo significa che

- ad ogni punto  $P$  corrisponde uno e un solo punto  $P'$
- per ogni punto del piano esiste un punto che si trasforma in esso (ovvero ogni punto  $P'$  «proviene» da un punto  $P$ )
- a punti distinti corrispondono punti distinti

# Movimenti rigidi, isometrie , congruenze

- Un insieme di movimenti che “modificano poco” il piano è quello degli “spostamenti”, infatti rispetto ad uno spostamento due figure corrispondenti differiscono al più per la disposizione o la posizione occupata.

Non è difficile intuire che gli spostamenti del piano sono “slittamenti”, “rotazioni”, “ribaltamenti ” o loro composizioni.

Il concetto matematico che traduce il concetto intuitivo di spostamento è quello di *isometria*.

Le *isometrie* o *movimenti rigidi* sono quelle trasformazioni del piano che non mutano le distanze tra punti, cioè presi comunque due punti del piano  $P$  e  $Q$ , la loro distanza coincide con quella dei loro trasformati  $P'$  e  $Q'$ .

Due figure che si corrispondono in una isometria si dicono *isometriche*.



# Osservazione sui concetti di isometria e di congruenza

- La definizione di isometria ci consente di affermare che due figure che si corrispondono in una isometria sono sempre congruenti (cioè sovrapponibili).  
Viceversa, se due figure sono congruenti allora esiste una trasformazione isometrica del piano che trasforma l'una nell'altra. In conclusione:
- *Due figure isometriche sono congruenti e, viceversa, se due figure sono congruenti, esiste una isometria nella quale le due figure si corrispondono.*

- Conviene d'altra parte osservare che: i concetti e i termini di congruenza e di isometria sono spesso confusi, per cui conviene allora sottolineare il fatto che *la congruenza tra figure* è **una relazione di equivalenza**, mentre *l'isometria* è **una funzione del piano** che induce una relazione di equivalenza
- Si constata inoltre la necessità di superare lo studio delle trasformazioni, spesso viste dallo studente limitate ad una figura e alla sua trasformata, per arrivare a considerare *la trasformazione* **come funzione definita sul piano**

- Viene anche in tal modo evidenziata la connessione tra i possibili metodi di insegnamento della geometria: da una parte l'approccio euclideo che utilizza il concetto intuitivo di movimento rigido, dall'altro l'approccio dinamico tramite le trasformazioni che utilizza il concetto di isometria.

Per l'insegnamento della geometria nella scuola secondaria di primo grado si consiglia di passare gradualmente dal metodo euclideo al metodo delle trasformazioni, quindi di passare dal concetto intuitivo di movimento rigido a quello di trasformazione e in particolare di isometria, preparando gradualmente il terreno per introdurre l'insegnamento assiomatico della geometria, che sarà svolto nella scuola secondaria di secondo grado.

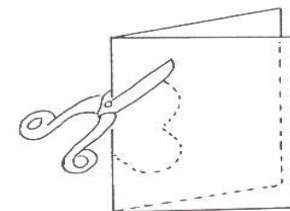
- La nostra proposta( progetto europeo ISSUE-percorso didattico Simmetrie), in linea con questa esigenza di passaggio graduale da una fase intuitiva alla formalizzazione, si traduce in una prassi didattica adeguata con uso di metodologie efficaci , la creazione di materiali, esercizi, prove e strumenti opportunamente integrati in un percorso di matematica e scienze.

Ci interessa studiare quali effetti hanno le trasformazioni sulle figure e soprattutto stabilire se le figure trasformate conservano qualche proprietà delle figure di partenza, come la distanza, la forma, il rapporto, l'estensione..

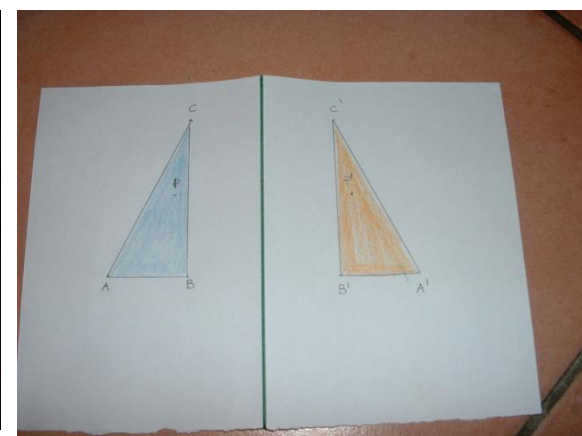
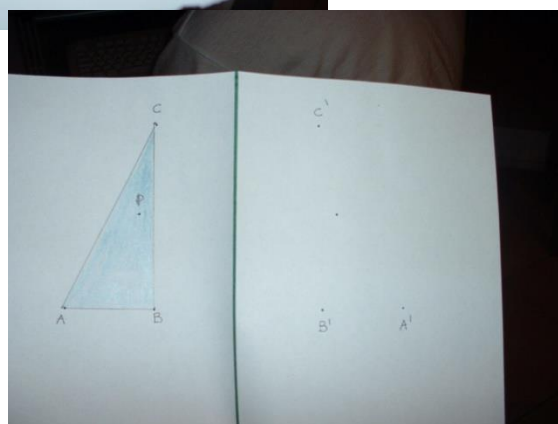
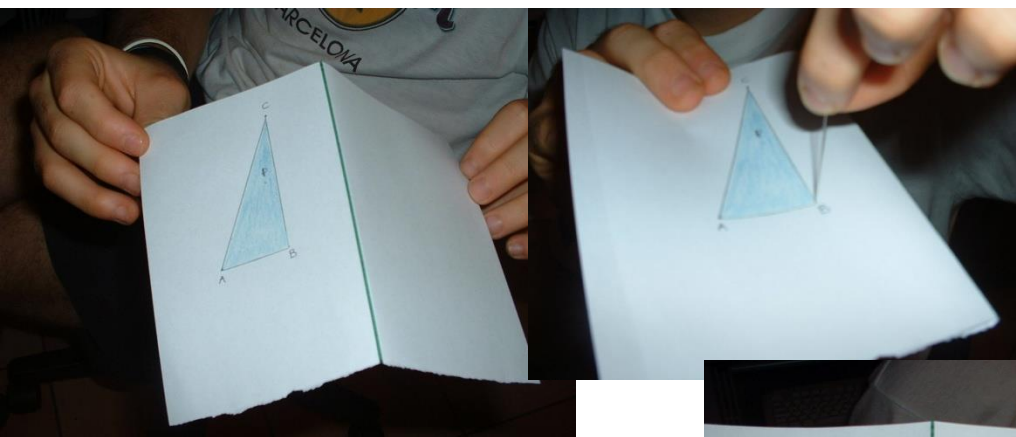
E' proprio sulla base di queste proprietà invarianti che potremo classificare le trasformazioni.

*La geometria diviene «studio delle proprietà delle figure che sono invarianti rispetto a certe trasformazioni»*

# Operative Phase: Cutting, Folding, Observing

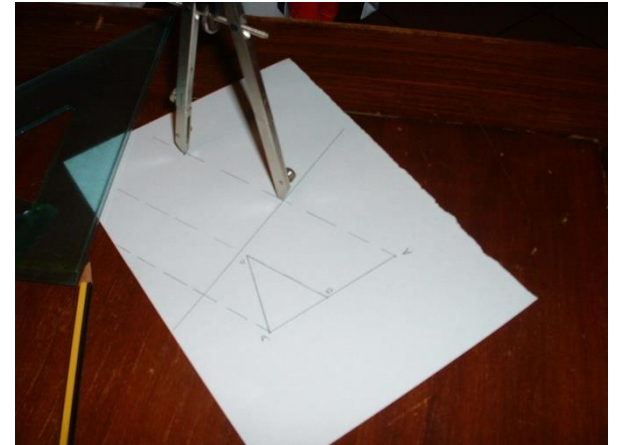
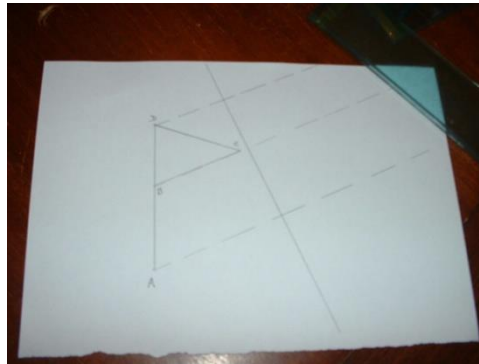
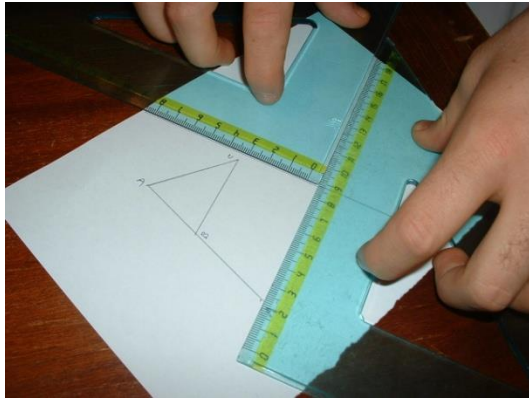
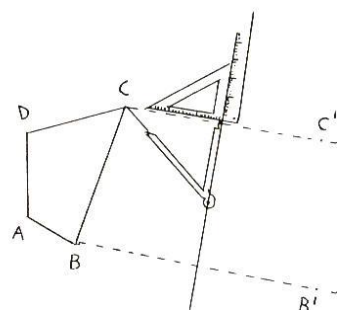


Constructing symmetric figures, in relation to an axis, with folding paper and a pin

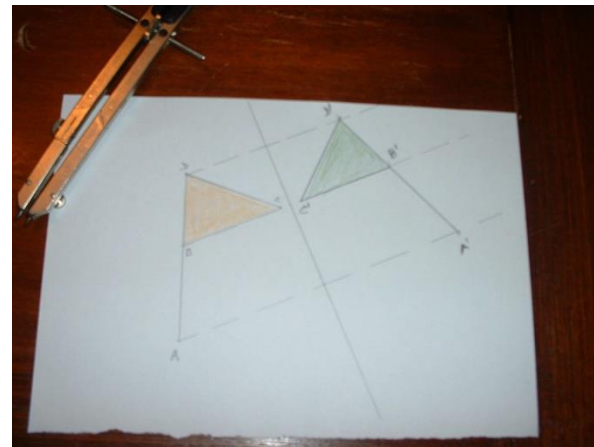


# Operative Phase

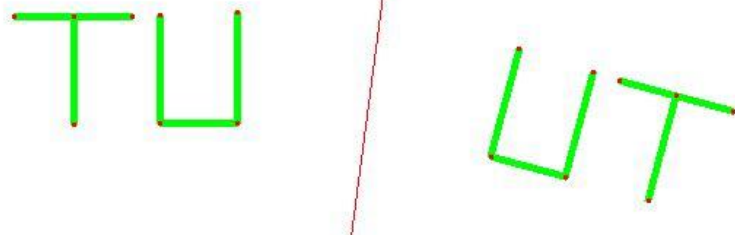
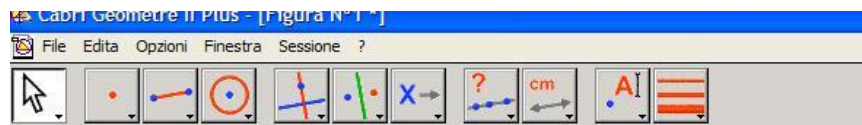
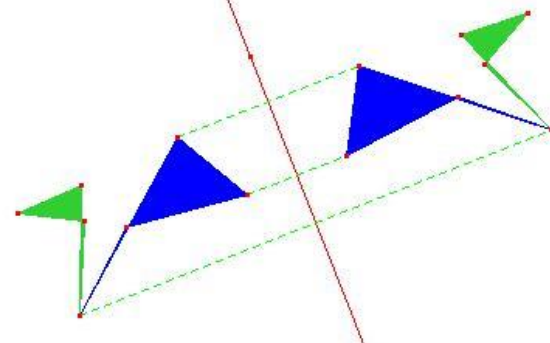
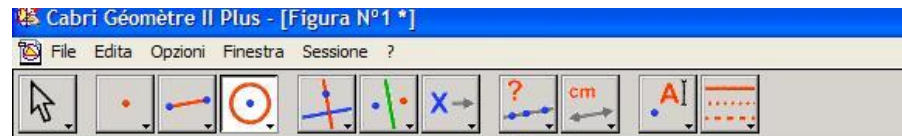
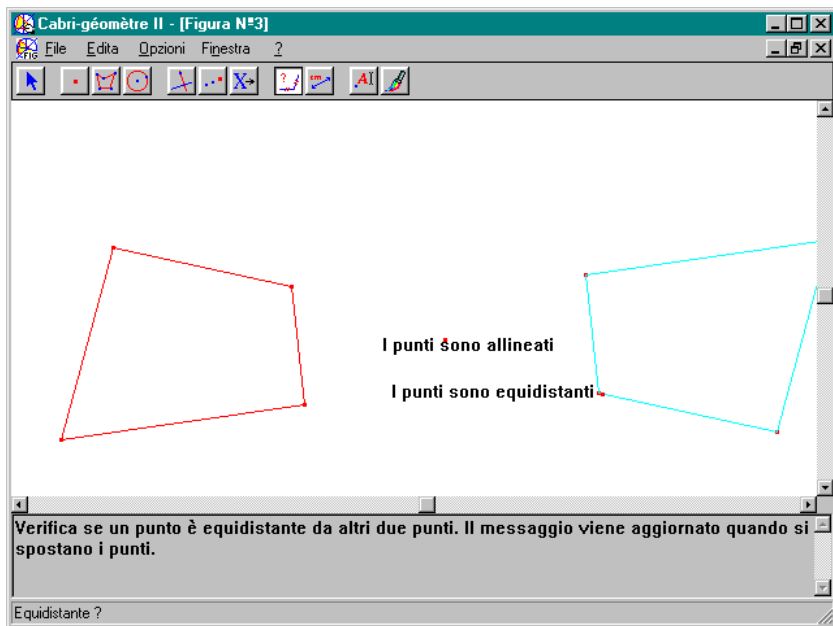
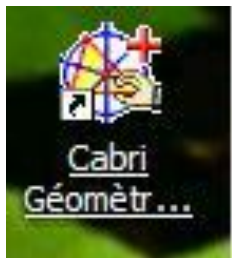
Drawing symmetric figures with a ruler and compass



Given a figure  $F$  and an axis  $r$ ,  
draw the figure  $F'$  symmetric with  
 $F$  in relation to  $r$



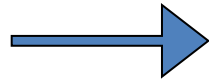
# Observation, Analysis and Test with Software



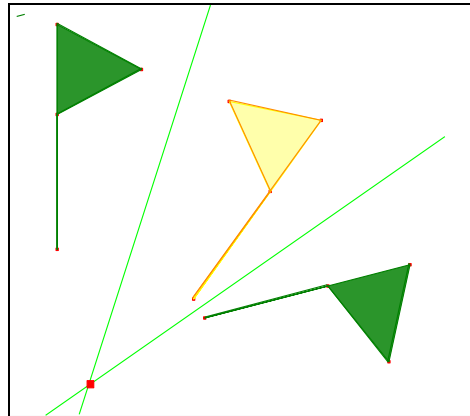
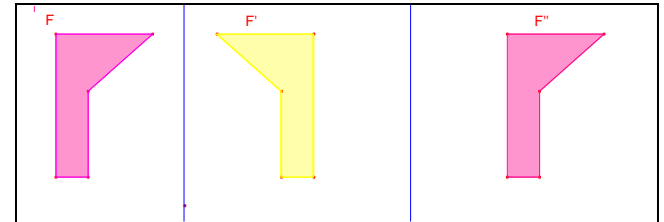


# Composition of Axial Symmetries (Reflections)

In parallel axes



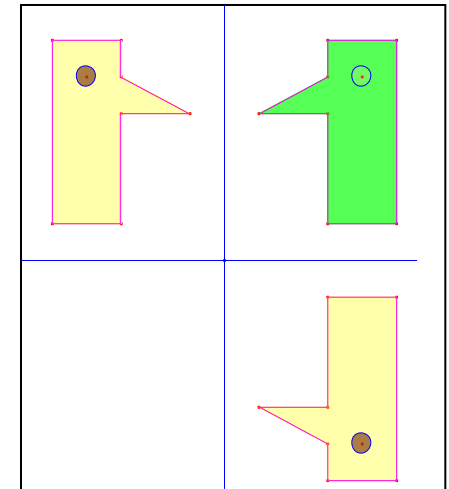
Traslation



Rotation



In intersecting axes



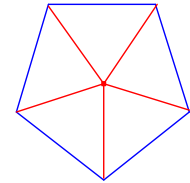
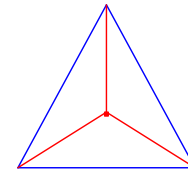
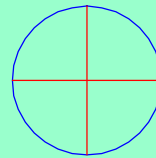
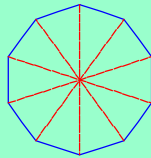
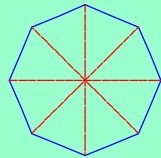
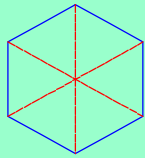
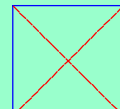
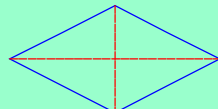
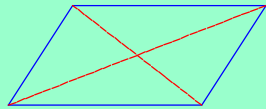
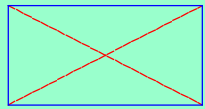
In orthogonal axes



Central symmetry

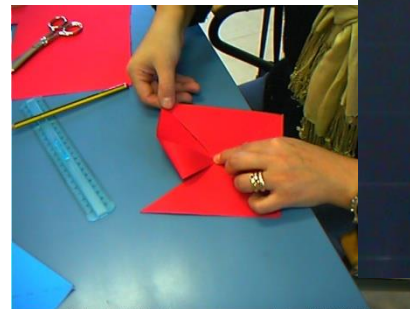
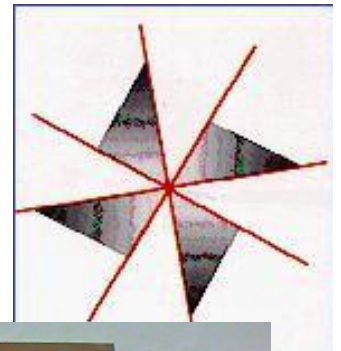
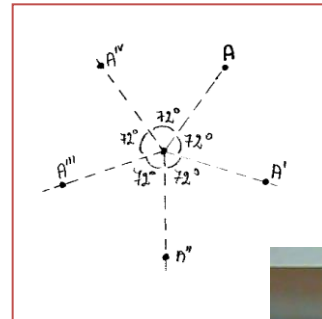
# Radial Symmetry

## Central Symmetry



Let's build a papermill...

progetto ISSUE



### Schema riassuntivo delle isometrie piane

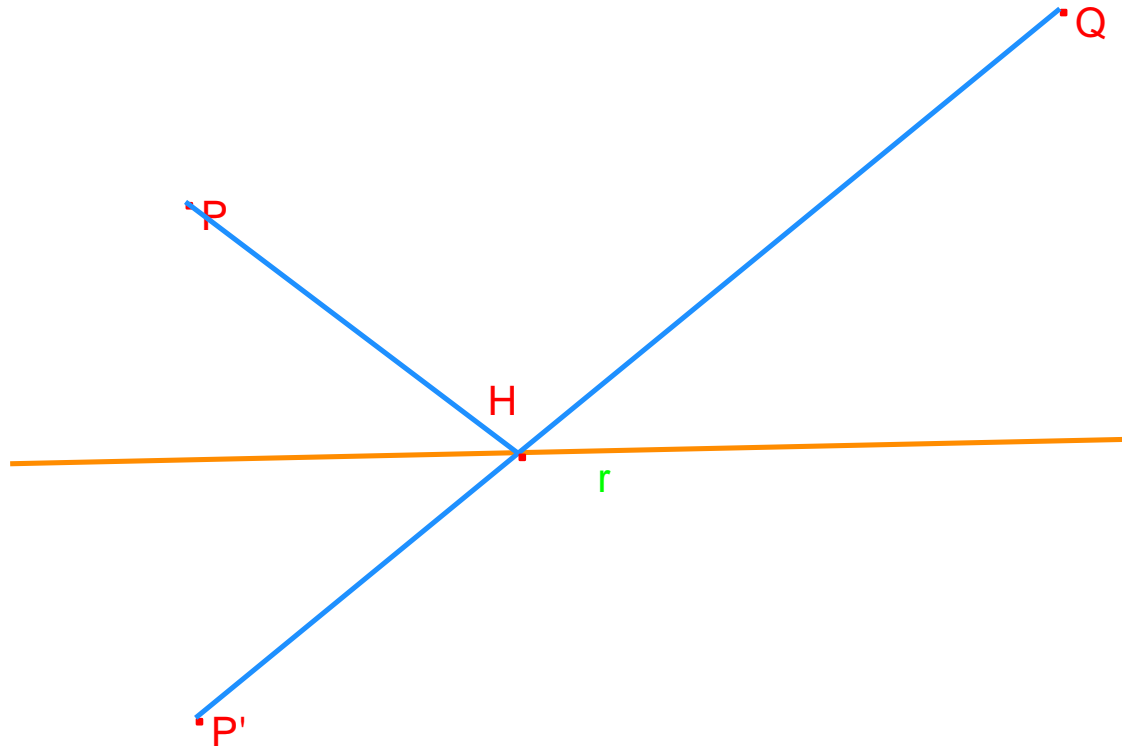
	Isometria con punto fisso	Isometrie senza punti fissi
Isometrie dirette	Rotazioni (in particolare simmetrie centrali)	Traslazioni (di un vettore <b>non nullo</b> $\mathbf{v}$ )
Isometrie inverse	Simmetrie assiali	Antitraslazioni (di un vettore $\mathbf{v}$ )

# Riflessioni

*La simmetria del piano è un argomento nuovo?*

- problema di Erone (I secolo d.C.)
- proprietà dei poligoni, in particolare dei poligoni regolari
- proprietà dei poliedri, in particolare dei solidi platonici
- proprietà delle coniche

# Problema di Erone



# Le idee più comuni tra gli alunni, in relazione ai diversi argomenti trattati

- **Parallelismo e perpendicolarità**

Difficoltà nel riconoscere o indicare il parallelismo o la perpendicolarità

Il più grande problema della perpendicolarità è che essa viene confusa col concetto di “verticale”.

## **Simmetrie come trasformazioni geometriche**

Difficoltà nel mantenere l'equidistanza nella costruzione di figure simmetriche

Gli alunni spesso riconoscono le simmetrie come movimenti e non come trasformazioni geometriche

Gli alunni non distinguono se due figure sono simmetriche rispetto ad un punto, ad una retta o ad un piano

## **Proprietà delle simmetrie**

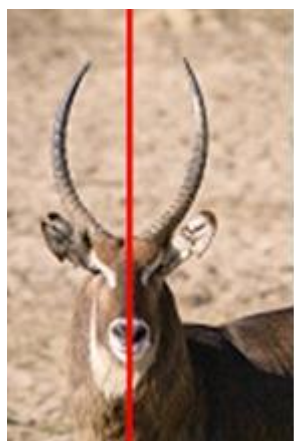
Gli oggetti simmetrici in una simmetria assiale vengono disegnati come se l'asse di simmetria fosse verticale

Non tutte le simmetrie di una figura vengono individuate dagli alunni

I concetti di invarianti non vengono compresi

I punti fissi di una trasformazione non sono spesso individuati

Difficoltà nel riconoscere la simmetria come una particolare corrispondenza biunivoca tra punti



## Simmetrie in natura

- Gli alunni confondono la simmetria con la somiglianza di parti negli esseri viventi e non viventi

Negli esempi presi dalla natura, gli alunni riconoscono solo la simmetria assiale (o bilaterale) con l'asse di simmetria in posizione verticale.

Spesso associano il concetto di simmetria con la riflessione allo specchio.

Non sanno e non riescono a riconoscere le simmetrie centrali o la compresenza di più di un asse di simmetria (simmetria radiale)